26. mars 2010

ECON 1500

Vårsemesteret 2010: Seminar nr. 7 (uke 12), oppgave 3

Cobb-Douglas nyttefunksjon

Løsningen nedenfor er svært omfattende. Til dels inneholder den diskusjon av spørsmål det ikke er eksplisitt spurt om.

Preferansene er gitt ved nyttefunksjonen

$$U\left(c_1, c_2\right) = a\ln c_1 + b\ln c_2$$

Priser og inntekt blir betegnet p_1, p_2, m.

(a) Er indifferenskurvene konvekse?

Den marginale substitusjonsbrøken er gitt ved

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial c_1}}{\frac{\partial U}{\partial c_2}} = \frac{\frac{a}{c_1}}{\frac{b}{c_2}} = \frac{a}{b}\frac{c_2}{c_1}$$

Når man beveger seg nedover og mot høyre langs en indifferenskurve, slik at c_1 går opp og c_2 går ned, blir den marginale substitusjonsbrøken redusert. Indifferenskurven blir flatere, noe som innebærer at den er konveks.

Et alternativt og mer formelt resonnement er følgende: En indifferenskurve er gitt ved

(1) $$a\ln c_1 + b\ln c_2 = u$$

der u er et fast tall. Sammenhengen (1) kan uttrykkes som $\ln c_2 = \frac{u}{b} - \frac{a}{b}\ln c_1$ eller

$$c_2 = \mathrm{e}^{\frac{u}{b}} c_1^{-\frac{a}{b}}$$

Det gir

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{a}{b}\mathrm{e}^{\frac{u}{b}} c_1^{-\frac{a+b}{b}} < 0$$

$$\frac{d^2 c_2}{\left(dc_1\right)^2} = \frac{a}{b}\frac{a+b}{b}\mathrm{e}^{\frac{u}{b}} c_1^{-\frac{a+2b}{b}} > 0$$

Altså er indifferenskurven fallende og konveks.

(b) Finn etterspørselsfunksjonene, og regn ut budsjettandel for de to varene.

Når indifferenskurvene er konvekse og begge goder blir etterspurt i positiv mengde, er optimum karakterisert ved at den marginale substitusjonsbrøken er lik prisforholdet, altså

$$\frac{a}{b}\frac{c_2}{c_1}=\frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

Man kan også skrive opp Lagrange-uttrykket for maksimering av nytte under budsjettbetingelsen og utlede (2) fra førsteordensbetingelsene.

Av (2) følger $p_2c_2=\frac{b}{a}p_1c_1$, som sammenholdt med budsjettbetingelsen $p_1c_1+p_2c_2=m$ gir $p_1c_1\left[1+\frac{b}{a}\right]=m$, som igjen medfører

$$\begin{aligned} p_1c_1&=\frac{a}{a+b}m \\ p_2c_2&=\frac{b}{a+b}m \end{aligned} \tag{3}$$

De ordinære (ikke-kompenserte) etterspørselsfunksjonene følger direkte av (3):

$$\begin{aligned} c_1&=c_1\left(p_1,p_2,m\right)=\frac{a}{a+b}\frac{m}{p_1} \\ c_2&=c_2\left(p_1,p_2,m\right)=\frac{b}{a+b}\frac{m}{p_2} \end{aligned} \tag{4}$$

Budsjettandelene for de to varene følger også av (3) og er henholdsvis $\frac{a}{a+b}$ og $\frac{b}{a+b}$. De er altså konstante, dvs. uavhengige av priser og inntekt.

(c) Finn priselastisitetene.

Av (4) ser vi at $c_1\left(p_1,p_2,m\right)$ er omvendt proporsjonal med p_1 og uavhengig av p_2. Derav følger at priselastisiteten for gode 1 med hensyn på egen pris er -1, mens priselastisiteten for gode 1 med hensyn på den andre prisen er 0. Tilsvarende gjelder for gode 2.

Mer formelt får vi for egenpriselastisiteten for gode 1:

$$\frac{\partial c_1\left(p_1,p_2,m\right)}{\partial p_1}=-\frac{a}{a+b}\frac{m}{\left(p_1\right)^2}=-\frac{c_i}{p_i}$$

$$e_{11}=\frac{p_1}{c_1}\frac{\partial c_1}{\partial p_1}=-1$$

For krysspriselastisiteten får vi:

$$\frac{\partial c_1\left(p_1,p_2,m\right)}{\partial p_2}=0$$

$$e_{12} = \frac{p_2}{c_1}\frac{\partial c_1}{\partial p_2} = 0$$

Utregningene for gode 2 er analoge.

(d) Uten å regne, hva kan du nå si om inntektselastisiteten?

Siden $e_{11} + e_{12} + E_1 = 0$, følger det umiddelbart at $E_1 = 1$. Det samme følger direkte av at $c_1\left(p_1, p_2, m\right)$ er proporsjonal med *m*. Tilsvarende finner vi at $E_2 = 1$.

(e) Er godene normale?

Inntektselastisitetene er positive, altså er godene normale.

(f) Finn konsumentens utgiftsfunksjon og kompensert etterspørsel.

Utgiftsfunksjonen *Y* er kostnaden ved å oppnå et visst nyttenivå, når dette gjøres på billigste måte. Den er en funksjon av prisene og det spesifiserte nyttenivået, som vi betegner *u*. Altså:

$$Y\left(p_1, p_2, u\right) = \min_{c_1, c_2} p_1 c_1 + p_2 c_2 \text{ gitt } a\ln c_1 + b\ln c_2 = u$$

Lagrange-uttrykket blir

$$L = p_1 c_1 + p_2 c_2 - \mu\left(a\ln c_1 + b\ln c_2 - u\right)$$

Førsteordensbetingelsene for optimum blir

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_1} &= p_1 - \mu\frac{a}{c_1} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{p_1 c_1}{a} \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} &= p_2 - \mu\frac{b}{c_2} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{p_2 c_2}{b} \end{aligned}$$

Fra (5) følger (2). Det viser den nære sammenhengen mellom nyttemaksimeringen i spørsmål (b) utgiftsminimeringen som blir studert her.

På grunnlag av (5) kan c_2 uttrykkes som $c_2 = \frac{bp_1}{ap_2}c_1$. Nytten kan da skrives

$$u = a\ln c_1 + b\ln c_2 = a\ln c_1 + b\left[\ln\frac{bp_1}{ap_2} + \ln c_1\right]$$

Denne likningen kan løses for $\ln c_1$, og vi får

$$\ln c_1 = \frac{u}{a+b} - \frac{b}{a+b}\ln\frac{bp_1}{ap_2}$$

Ved å ta eksponenten av dette får vi den kompenserte etterspørselsfunksjonen for gode 1:

$$\text{(6)} \qquad c_1 = h_1\left(p_1, p_2, u\right) = \mathrm{e}^{\frac{u}{a+b}} p_1^{\frac{-b}{a+b}} p_2^{\frac{b}{a+b}} a^{\frac{b}{a+b}} b^{\frac{-b}{a+b}}$$

Et analogt resonnement for gode 2 gir

(7) $$c_2 = h_2\left(p_1, p_2, u\right) = \mathrm{e}^{\frac{u}{a+b}} p_1^{\frac{a}{a+b}} p_2^{\frac{-a}{a+b}} a^{\frac{-a}{a+b}} b^{\frac{a}{a+b}}$$

Litt regning gir så

(8) $$\begin{aligned} &Y\left(p_1, p_2, u\right) = p_1 h_1\left(p_1, p_2, u\right) + p_2 h_2\left(p_1, p_2, u\right) = \\ &\mathrm{e}^{\frac{u}{a+b}} p_1^{\frac{a}{a+b}} p_2^{\frac{b}{a+b}} \left(a+b\right) a^{\frac{-a}{a+b}} b^{\frac{-b}{a+b}} \end{aligned}$$

Uttrykkene (6), (7) og (8) kan virke kompliserte, men strukturen burde likevel være klar og oversiktlig.

For øvrig kan uttrykkene brukes til å forsikre seg om at

$$\frac{\partial Y\left(p_1, p_2, u\right)}{\partial p_i} = h_i\left(p_1, p_2, u\right)$$